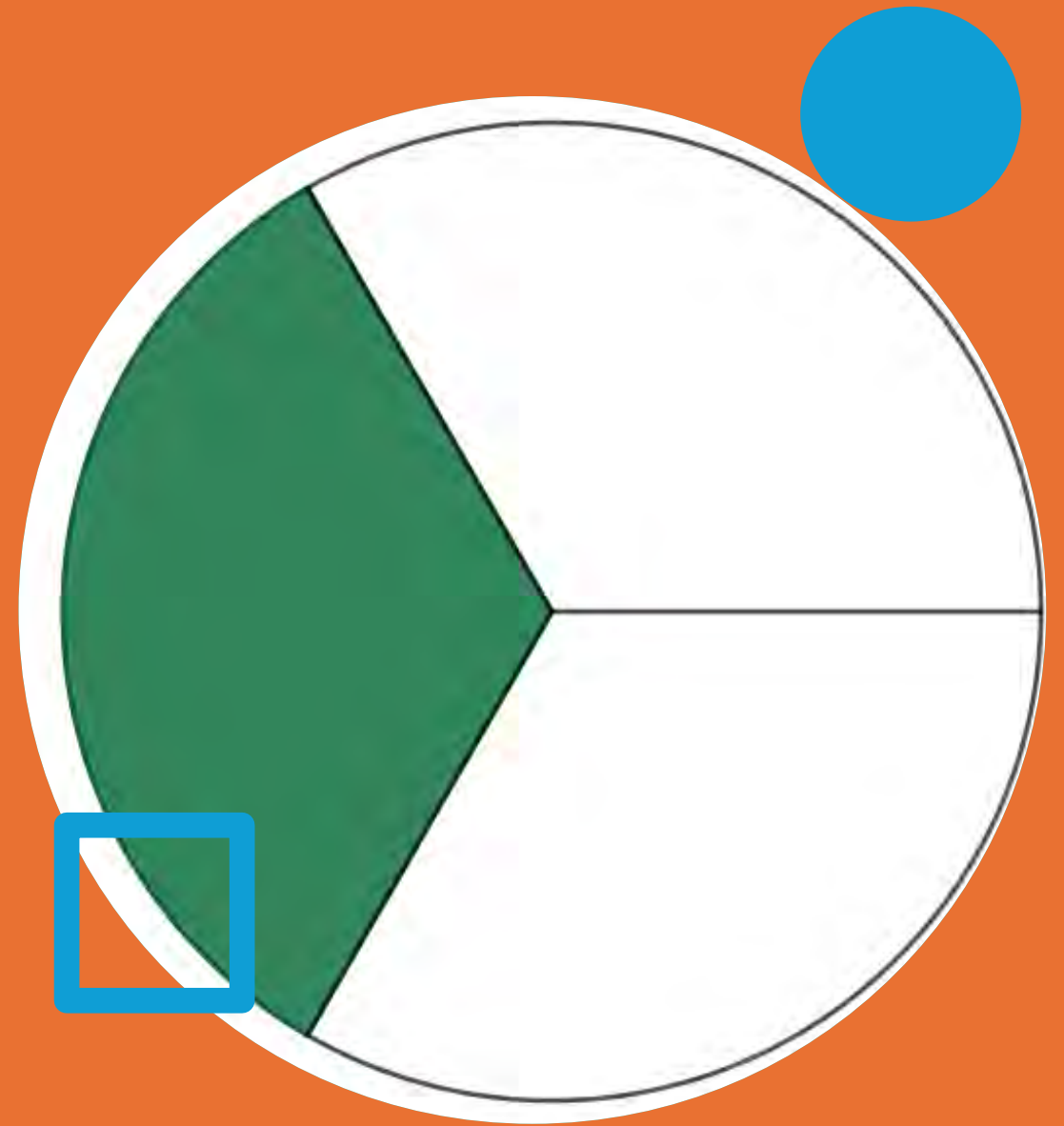


Når brøker bøvler!



Præsentation



Underviser Læreruddannelsen i
Århus
Projektleder for TRACK

Målet

At få indblik heltalsdistraktorer



Program

1. Udvidelse af elevernes talbegreb

2. Heltalsdistraktorer

Repræsentation

Størrelse

Tæthed

Ækvivalens

Regneoperationer

3. Hvilke elever er i vanskeligheder

1. Udvidelse af talbegrebet

Opgave 6

Subtraher

$$5.1 \quad 649 - 1799 = \underline{\hspace{2cm}}$$

93% korrekt

$$5.2 \quad 1008 - 959 = \underline{\hspace{2cm}}$$

77% korrekt

$$5.3 \quad 15 - 75 = \underline{\hspace{2cm}}$$

71% korrekt

$$5.4 \quad 1205 - 8 = \underline{\hspace{2cm}}$$

75% korrekt

Opgave 10

Lidtegn

101 $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} =$ _____

102 $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} =$ _____

103 $2\frac{1}{2} =$ _____

Vurder, hvilken opgave er
sværest? Hvilken er lettest?
Hvor mange procent har cirka
svaret korrekt?

Opgave 10

Lidpegn

$$10.1 \quad \frac{1}{2} + \frac{3}{4} =$$

$$10.2 \quad \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} =$$

52% korrekt

$$10.3 \quad 20\% \frac{1}{2} =$$

Opgave 10.1

28.822 (44 %) af eleverne har besvaret opgaven korrekt.

35109 elever har afgivet fejlsvar i delopgaven og 1158 elever har ikke afgivet et svar.

	4/6	15984	25 %	46 %
	4/4	1638	3 %	5 %
	4/8	1618	2 %	5 %
	5/5	1519	2 %	4 %

Opgave 10.2

33.650 (52 %) af eleverne har besvaret opgaven korrekt.

29090 elever har afgivet et fejlsvar i delopgaven og 2349 elever har ikke afgivet et svar.

	3/4	4075	6 %	14 %
	7/6	3435	5 %	12 %
	4/3	2155	3 %	7 %
	12/6	1963	3 %	7 %

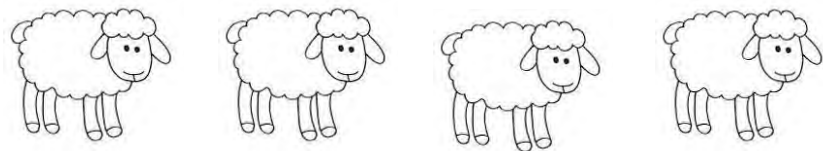
Opgave 10.3

14.084 (22 %) af eleverne har besvaret opgaven korrekt.

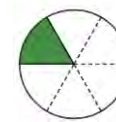
46986 elever har afgivet et fejlsvar i delopgaven og 4019 elever har ikke afgivet et svar.

	1/4	10055	15 %	21 %
	1	7245	11 %	15 %
	0,25	7223	11 %	15 %
	1/2	2500	4 %	5 %

Naturlige tal



Rationale tal



Hvorfor er brøker vigtige?

- Forståelse af brøk størrelse er en prædikter for senere brøk-aritmetik og samlet matematisk forståelse (Siegler et al., 2011).
- Sammenhæng til elevens algebra-forståelse (Booth and Newton, 2012)
- De lavest præsterende elever udvikler sig ikke (det samme i 6. og i 8. klasse) (Siegler and Pyke, 2013)

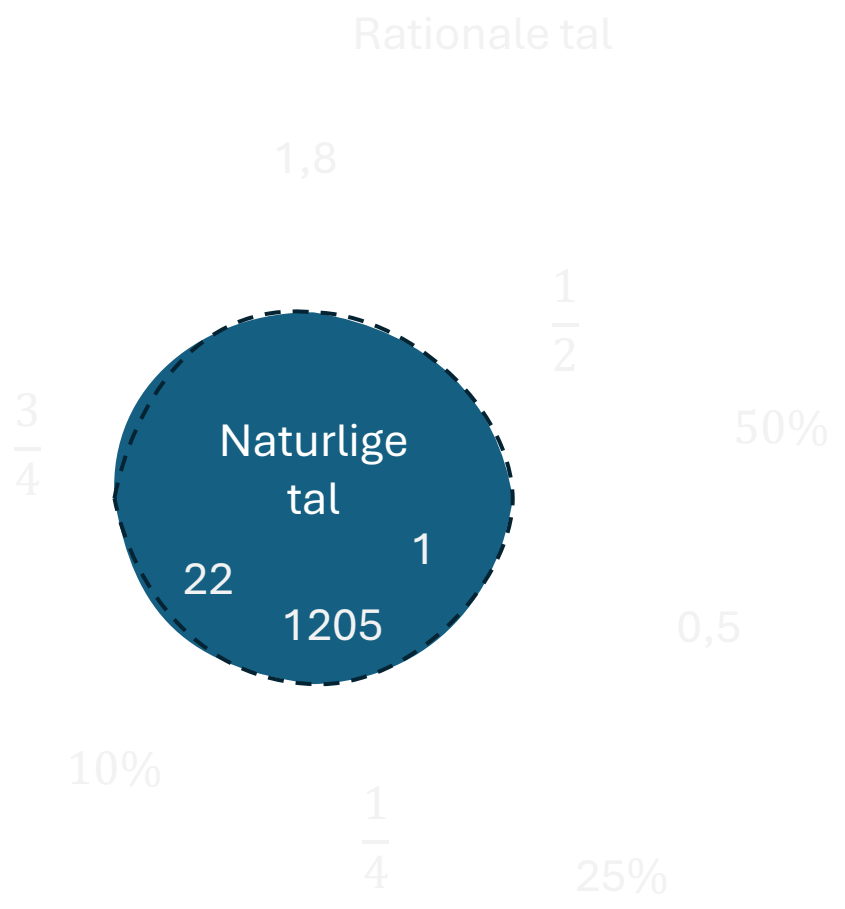
MÅL- læringsspor om brøker

Det skal bidrage til, at eleverne udvider deres talbegreb til også at omfatte brøker.

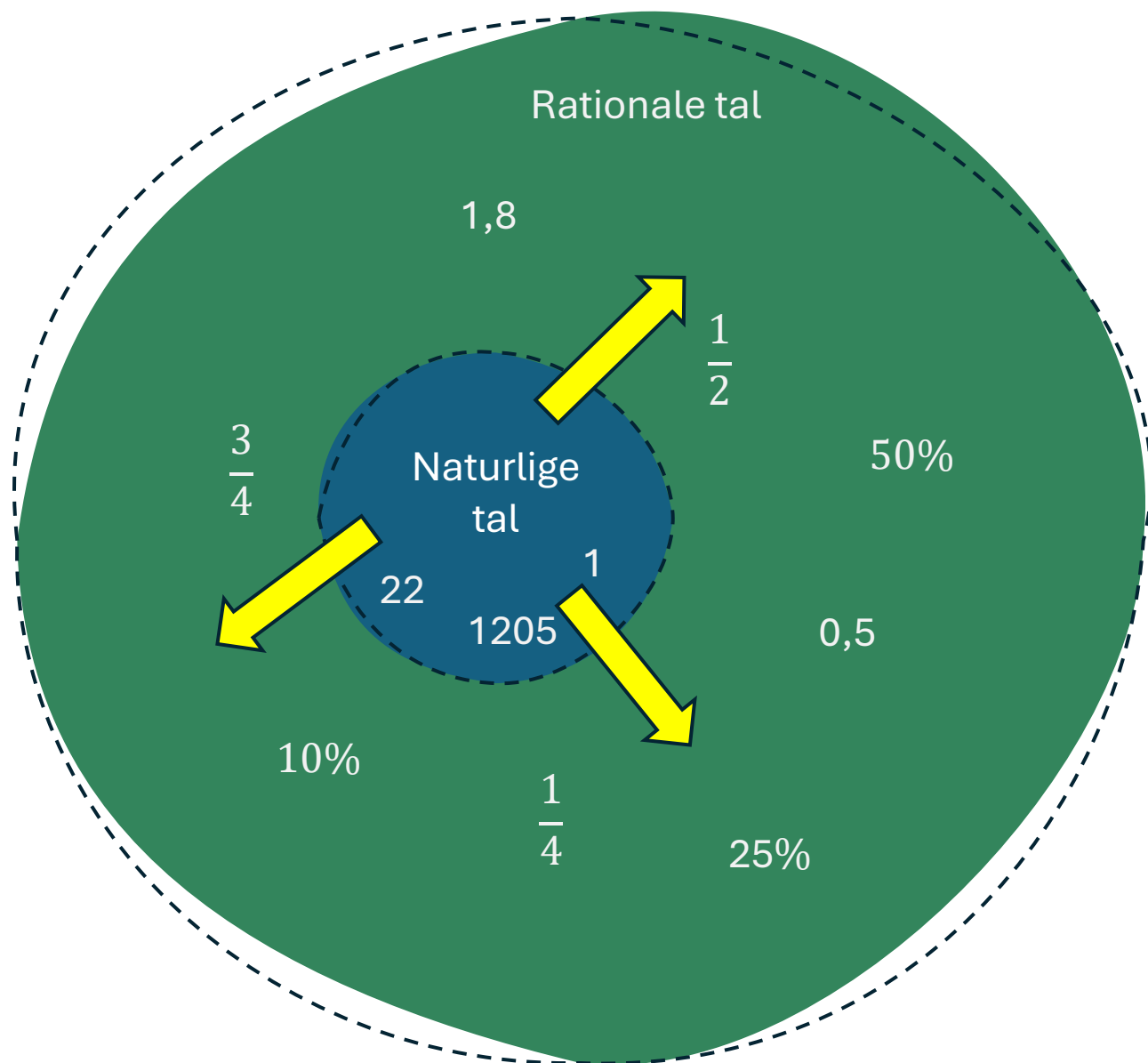
Det skal gøre eleverne i stand til at veksle fleksibelt mellem de forskellige grundlæggende betydninger af brøkbegrebet

Det skal bidrage til, at eleverne udvider deres talbegreb til også at omfatte brøker.

Det skal gøre eleverne i stand til at veksle fleksibelt mellem de forskellige grundlæggende betydninger af brøkbegrebet



Hvad kommer først?



FAGLIGT UDGANGSPUNKT

Erfaringer med at opdele i lige store dele.

Forståelse af de naturlige tal. Det vil sige en sikker forståelse af positionstal-systemet.

Har opbygget forståelse af simple multiplikative situationer

Strategier til division med heltal.



$$\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$\frac{7}{9}$ m er tæt på en hel meter.

$\frac{44}{89}$ er tæt på $\frac{1}{2}$.



$\frac{3}{4}$ af 8

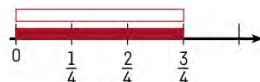
FASE 2

At forstå brøken som **en del af en** helhed med særligt fokus på ækvivalente brøker.
(Brøker er ækvivalente, hvis de repræsenterer den samme størrelse fx $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$).



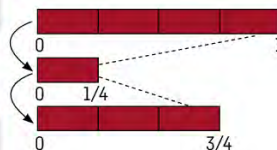
FASE 3

At kunne identificere og bruge stambrøken som en **måleenhed** til at finde størrelsen af en længde.



FASE 4

At kunne anslå størrelsen på brøkerne gennem arbejdet med **forholdet/ratioen** mellem tæller og nævner.



FASE 5

At kunne bruge brøken som en **operator** til at tage en del af en mængde – altså brøken opererer på en anden størrelse.

FORSLAG TIL VIDERE ARBEJDE

Procent

$$\frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 25\%$$

Algebraiske udtryk

$$\frac{2(3a+5b)}{4} = \frac{3a+5b}{2}$$

Symbolsprog

$$\frac{4x}{4} = \frac{20}{4}$$

Regning med brøker

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{3}{12} + \frac{4}{12} = \frac{7}{12}$$

FAGLIGT UDGANGSPUNKT

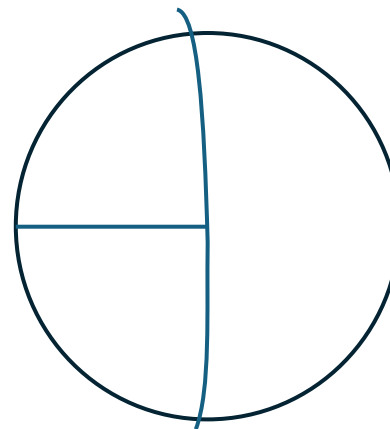
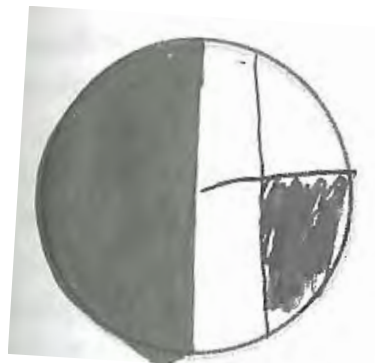
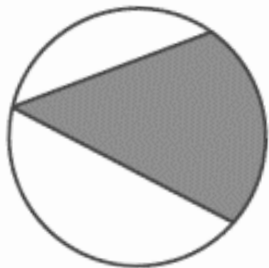
Erfaringer med at opdele i lige store dele.

Forståelse af de naturlige tal. Det vil sige en sikker forståelse af positionstal-systemet.

Har opbygget forståelse af simple multiplikative situationer

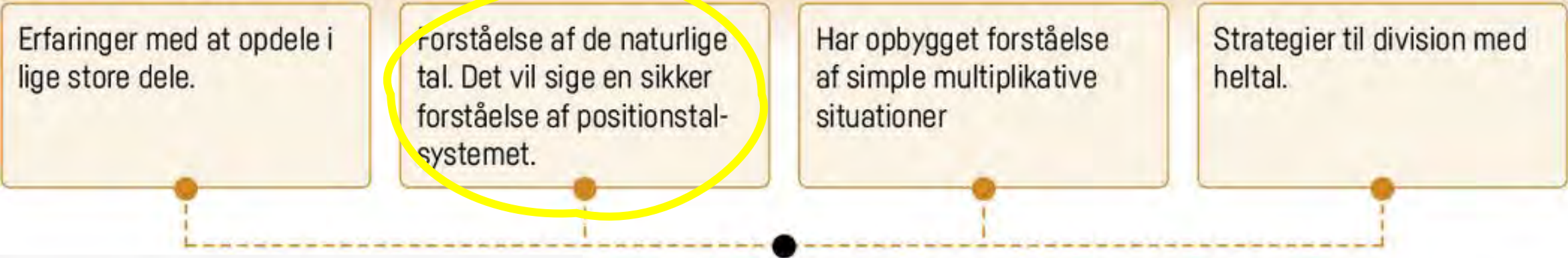
Strategier til division med heltal.

Hvor er $\frac{1}{3}$ farvet?



Hvem får flest lakridser?
3 børn deler 24 lakridser
5 børn deler 40?

FAGLIGT UDGANGSPUNKT



43 streger

43 stykker kridt

43 euro

1542

1542

1000

500

40

2



Tallet er: 1542

KASSE 1000	PLADE 100	STAV 10	TERNING 1



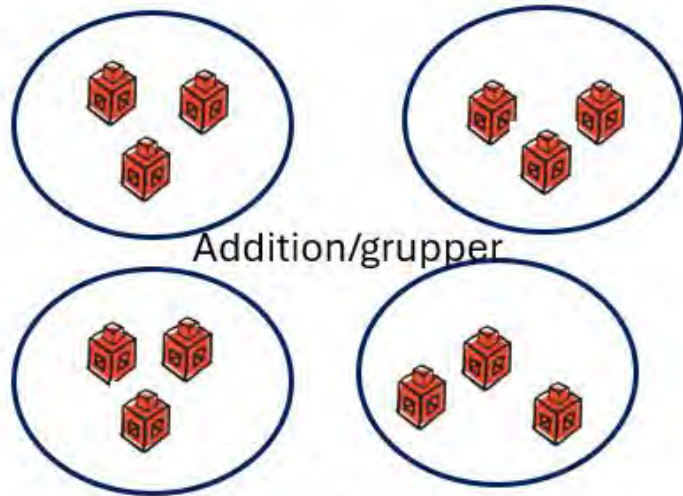
FAGLIGT UDGANGSPUNKT

Erfaringer med at opdele i lige store dele.

Forståelse af de naturlige tal. Det vil sige en sikker forståelse af positionstal-systemet.

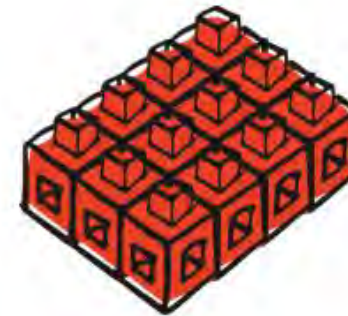
Har opbygget forståelse af simple multiplikative situationer

Strategier til division med heltal.



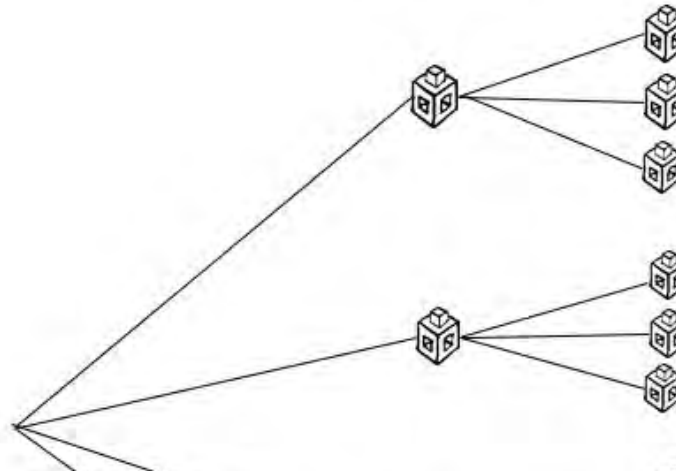
Addition/grupper

$$4 * 3$$



Areal

Forhold



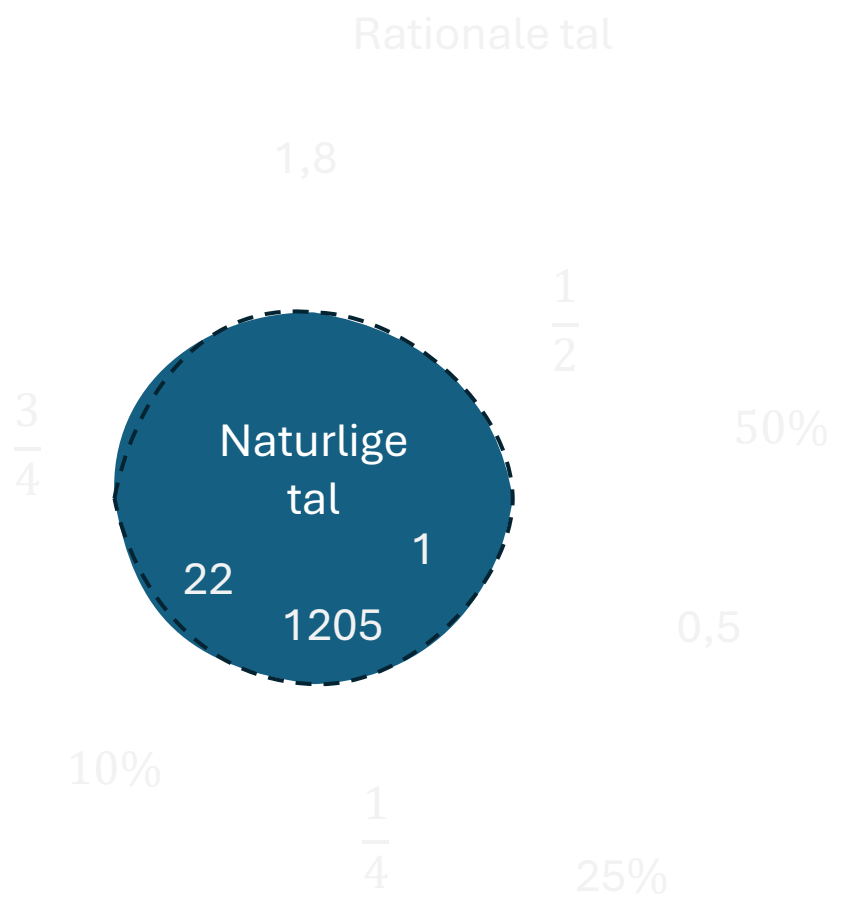
FAGLIGT UDGANGSPUNKT



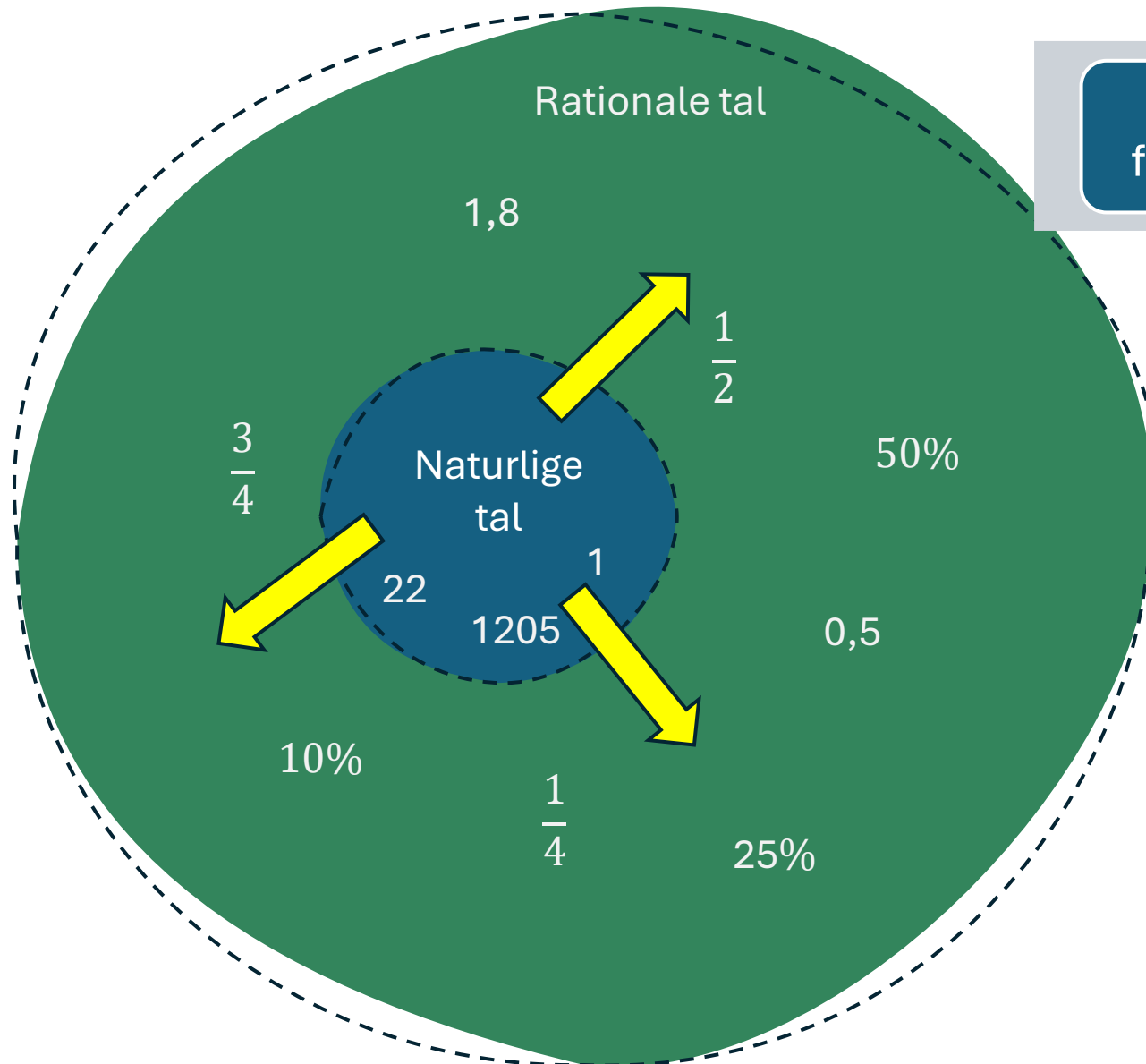
- Både målings- og ligedelingsdivision
- De spiller hver deres rolle i det videre arbejde med brøker

Naturlige
behov for
brøker –
ligedelings-
division.
Division
med rest.





Hvad kommer først?



Additiv-
forståelse

Multiplikativ
forståelse

a

Morten har to slanger: Sling og Sleng. Da Morten fik dem for fem år siden var de så lange

Sling



Sleng



a

Morten har to slanger: Sling og Sleng. Da Morten fik dem for fem år siden var de så lange

Sling



Sleng



I dag er de så lange

Sling



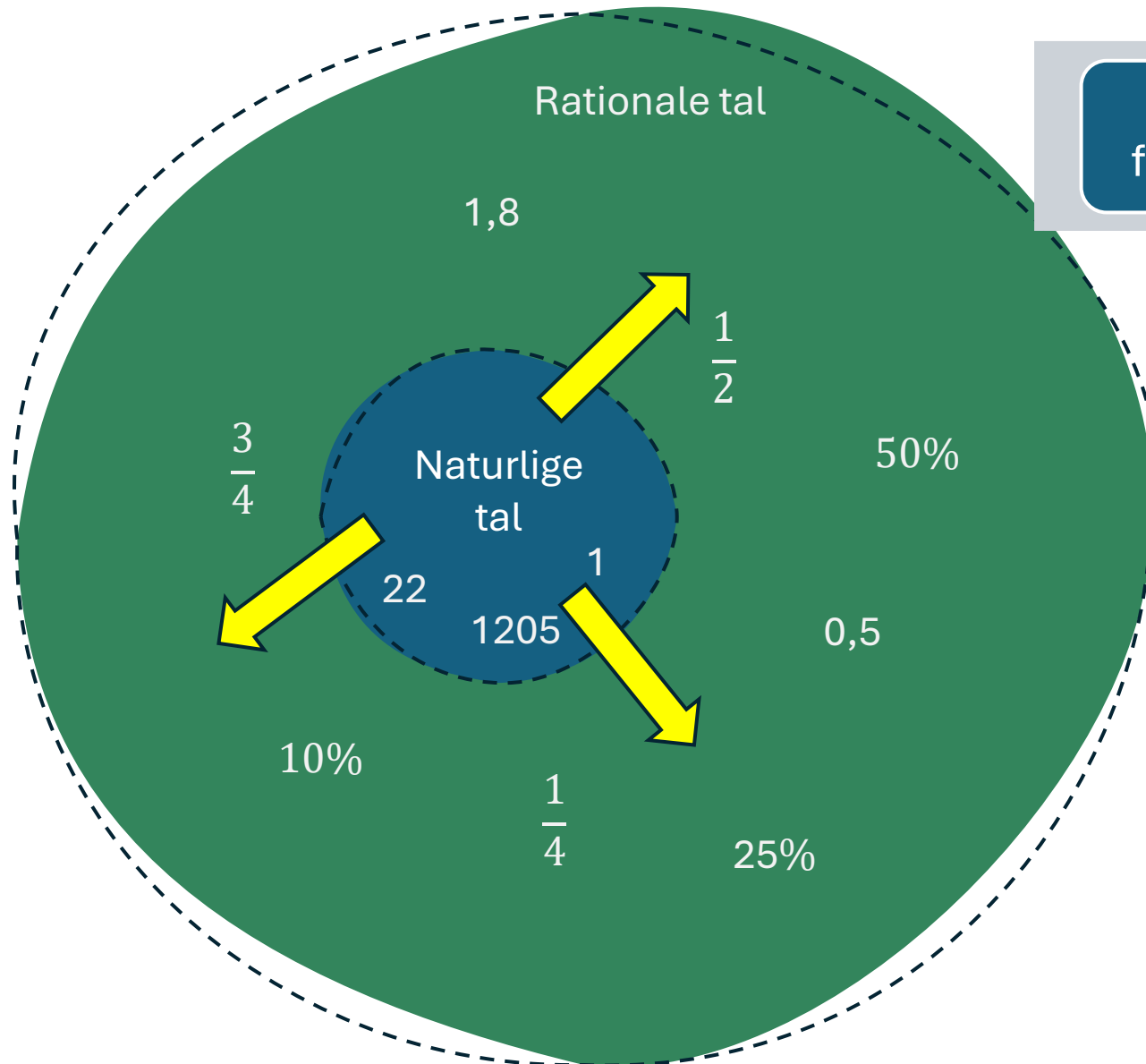
Sleng



Hvilken slange har vokset mest?

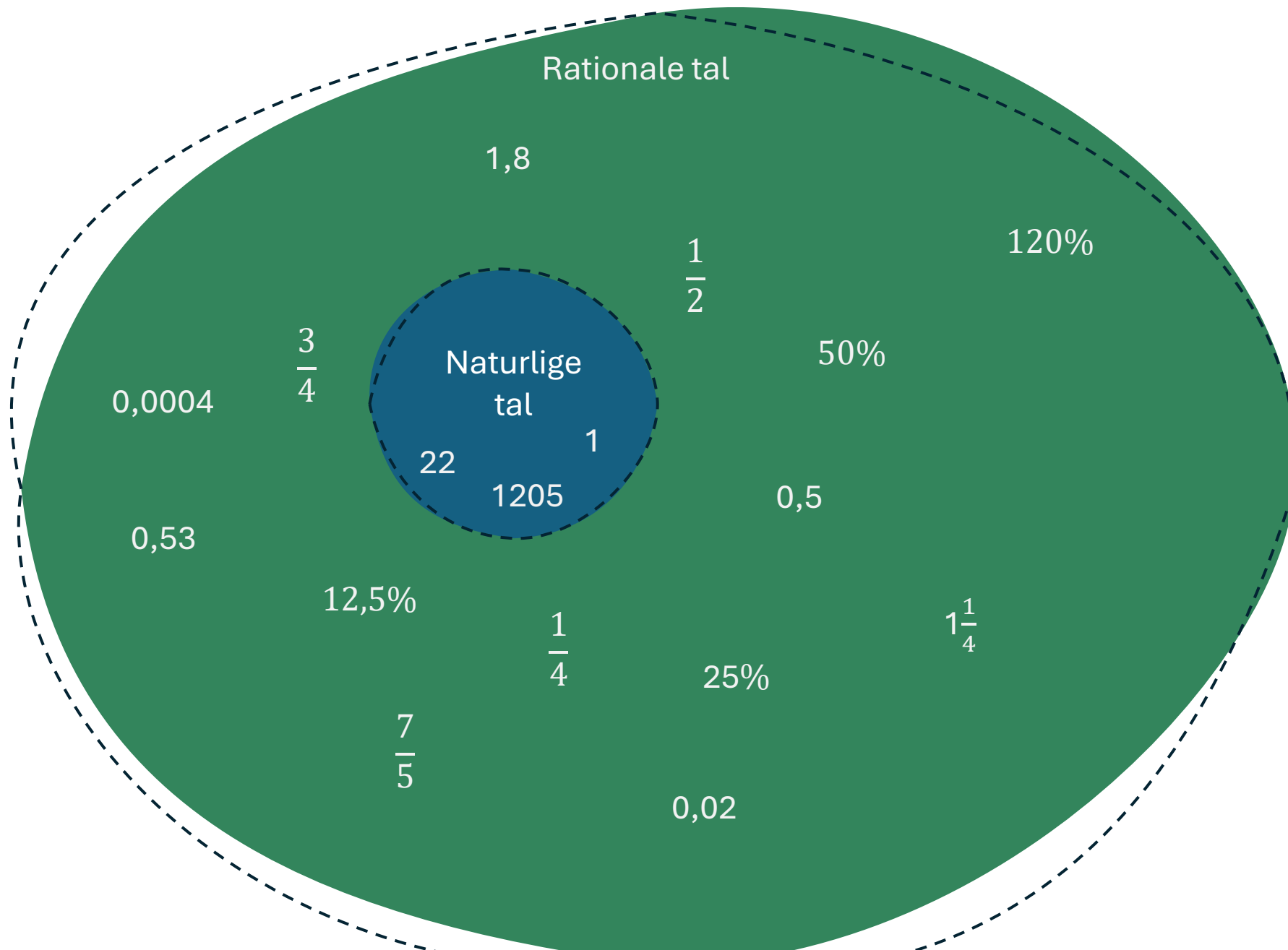
Additive, if children explicitly referred to growth in absolute terms¹ (i.e., difference between the snakes' lengths); e.g., "Sling only grew 4 dots, and Sleng grew 8 dots", "the distance in between both snakes is now larger than five years ago".

Multiplicative, if children explicitly referred to growth in relative terms (i.e., ratio between the snakes' lengths); e.g., "because you look at the body, and Sling fits four times in itself and Sleng only three times", "Sling has become 4 times as large and Sleng only 3 times".



Additiv-
forståelse

Multiplikativ
forståelse



De tre repræsentationer af rationale tal



Brøker

$\frac{4}{10}$ eller $\frac{4}{10}$ af 60

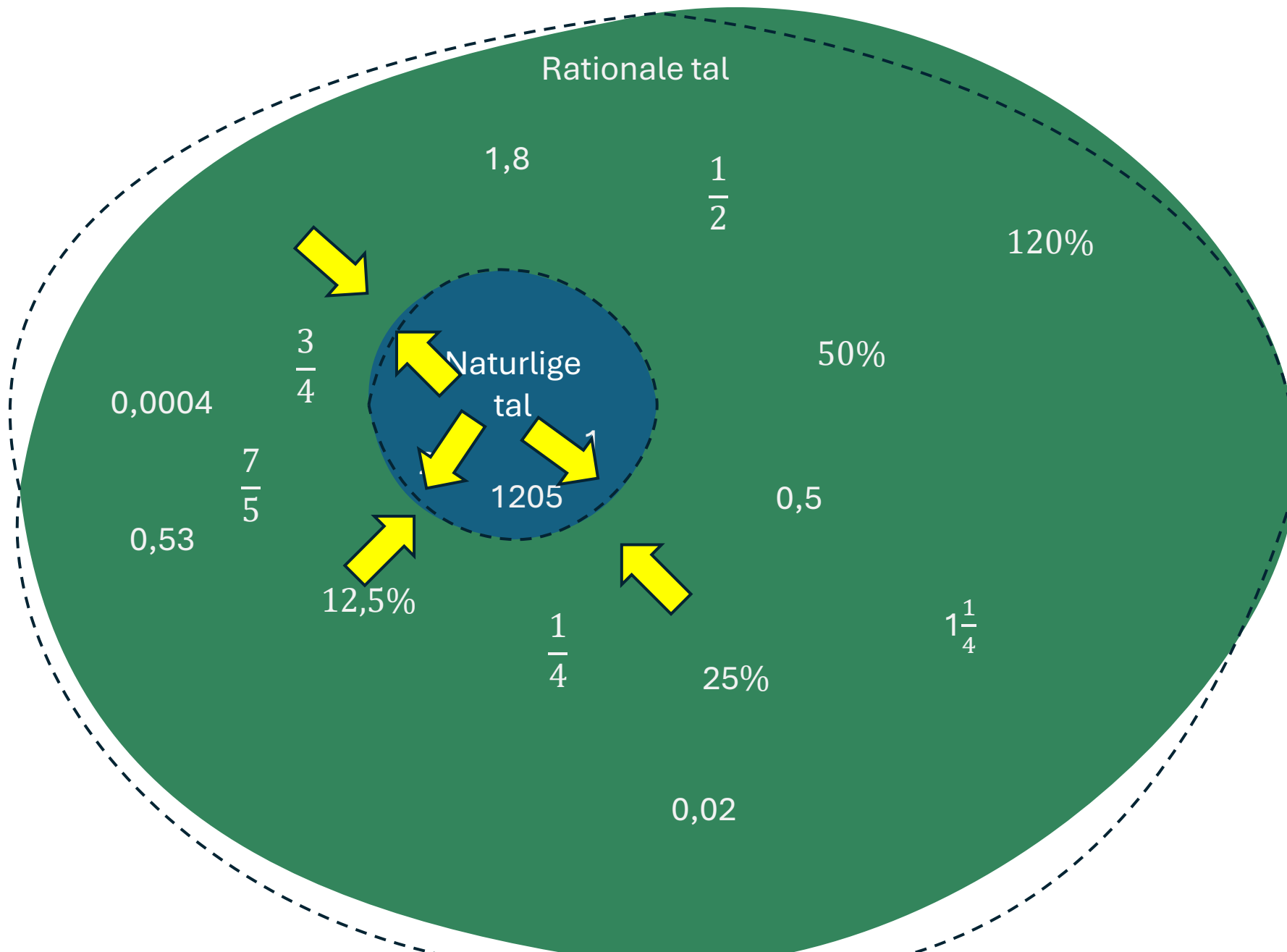
Vi har stadig brug for
brøker!

Decimaltal
Fx 0,4



Procent af noget
40% af 50

-40%

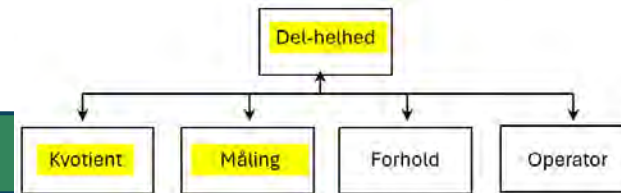


Kognitiv konflikt
Distraction

2. Heltalsdistraktorer

Heltalsdistraktorer	Naturlige tal	Brøker (rationale tal)
Repræsentation	Notation baseret på positionssystemet med cifre på en række, fx 8 eller 82.	To tal over og under en linje, som derved adskiller dem.
Værdi	Ethvert tal i talrækken vil have større værdi end hvert af de forrige tal. <i>Eksempel:</i> $3 < 4$	Det er forholdet mellem tælleren og nævneren, som angiver brøkens værdi. <i>Eksempel:</i> $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$
Tæthed	En rækkefølge som kan tælles, fx 2, 3, 4, ... Efter et tal kommer ét bestemt andet tal. Der er ikke nogen tal imellem to på hinanden følgende tal.	Der er ikke en bestemt brøk, som er den næste i rækken efter en given brøk. Der er fx ikke en bestemt brøk, som er den næste efter $\frac{1}{4}$. Der er uendeligt mange brøker imellem to brøker.
Ækvivalens	Hvert tal repræsenterer én bestemt værdi. <i>Eksempel:</i> 2 står for **, og 3 står for ***.	En brøk repræsenterer et forhold mellem to tal, som derved angiver én værdi. Forskellige brøker kan repræsentere den samme værdi. <i>Eksempel:</i> $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$
Regneoperation	Der kan skabes nogle bestemte forventninger til resultatet af regneoperationen <i>Eksempel:</i> Multiplikation giver altid et større resultat.	Der er ikke de samme forventninger til resultatet af regneoperationen som inden for de naturlige tal. <i>Eksempel:</i> Multiplikation giver ikke altid et større resultat.

Tabel 1. Udvalgte forskelle mellem naturlige tal og rationale tal, hvilke er årsag til forskellige heltalsdistraktorer.



Repræsentation

Naturlige tal		Rationale tal
Notation* baseret på positionssystemet med cifre på en række, fx 8 eller 82.		Brøker: To naturlige tal over og under en linje, som derved adskiller dem. Decimaltal: komma Procent: ny notation %

Forskellige elevfejl

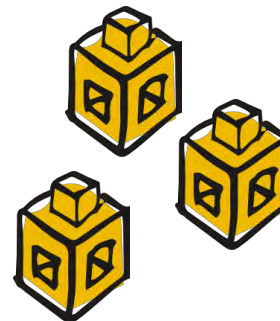
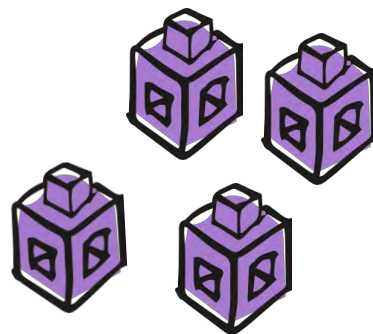
Hvor stor en brøkdel er farvet?



$$\frac{4}{1}$$

$$\frac{3}{4} = 7$$

Vis $\frac{3}{4}$ med centicubes, hvor $\frac{3}{4}$ af centicubesene er gule?





VI UDFORSKER

4 børn vil dele 9 kanelsnegle.
Hvor mange kanelsnegle får de hver?

Tegn.



Hvor mange hele får de hver? _____

Hvor mange er i rest? _____

Hvordan deler vi den sidste kanelsnegl?

Hvordan skriver vi den del, hver elev får af den sidste kanelsnegl?



$\frac{1}{4}$
← tæller
← brøkstreg
← nævner



En brøk er ét tal.
Brøken beskriver en del.

Så er $\frac{1}{4}$ ét eller to tal?

4 elever vil dele 9 kanelsnegle.
Hvor mange kanelsnegle får de hver?



Fortsetter næste side

Fortsat

Tænk, at du allerede har $\frac{1}{4}$ kanelsnegl.
Nu får du $\frac{1}{4}$ mere.



$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$$



$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

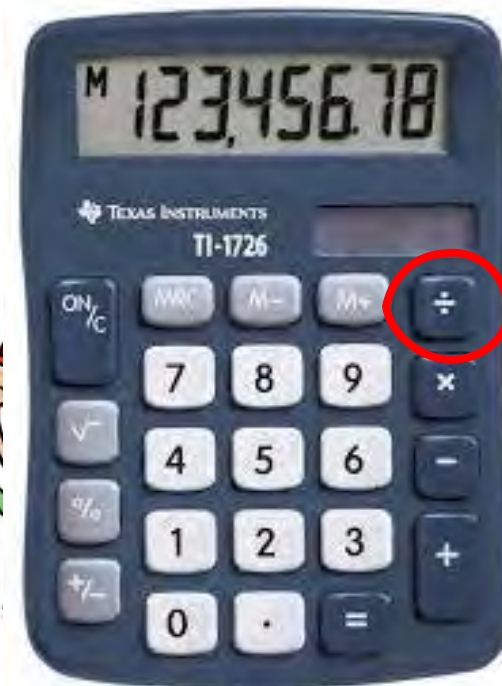


$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4}$$

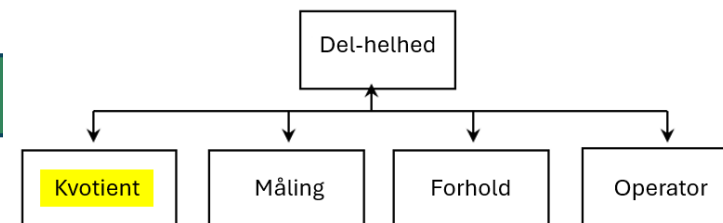
Hvad kan man sige
i stedet for $\frac{4}{4}$?



Hvad viser tælleren?
Hvad viser nævneren?



Værdi/Størrelse

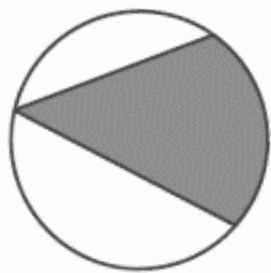


Naturlige tal		Rationale tal
Et hvert tal i talrækken vil være større end hvert af de forrige tal Eksempel: $3 < 4$ Antallet af cifre har betydning for tallets størrelse. Eksempel: 230 er større end 23		Det er forholdet mellem tælleren og nævneren, som angiver størrelsen. Eksempel $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$ Antallet af cifre i tallene angiver ikke noget om deres størrelse fx 0,23 er større end 0,123

Forskellige elevfejl

$$3,7 < 3,12$$

Hvor er $\frac{1}{3}$ farvet?



$$\frac{1}{5} < \frac{1}{7}$$

$$\frac{7}{4} < 1$$

Hvordan kan vi så arbejde med størrelsen af brøker?

- Sandwich-opgave (Kontext+)



GRUPPE A

GRUPPE B

GRUPPE C

GRUPPE D

Her ser du Emmas gruppe. De skal dele tre sandwich.

Opvask 2

a. Hvordan kan sandwichene deles, så alle får lige meget?
b. Få et hjælpark af din lærer og farv den del, Emma får.
c. Vis flere måder at dele sandwichene på.

GRUPPE B

GRUPPE C

GRUPPE D

Frokost i det grønne

Brøkdelt

Sandwich delt i 4 dele:

BRØKER

BRØKER

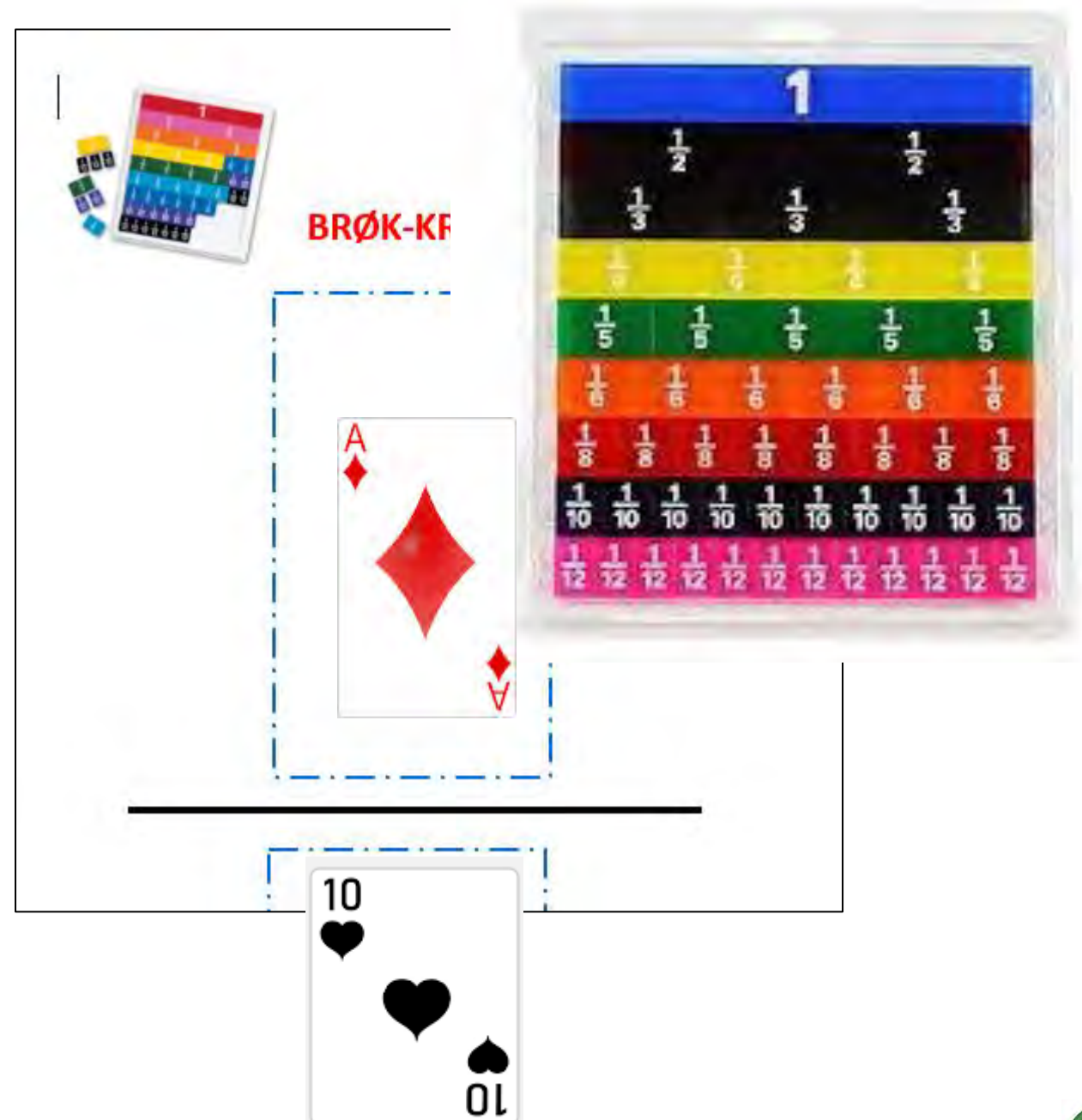


Krig med brøker

Progression

(brug; es, 2,3,4,5,6,8,10, dame)

- Spil med stambrøker
- Spil med ægte brøker
- Spil hvor du skal lægge op i den række følge du trækker – ægte og uægte brøker

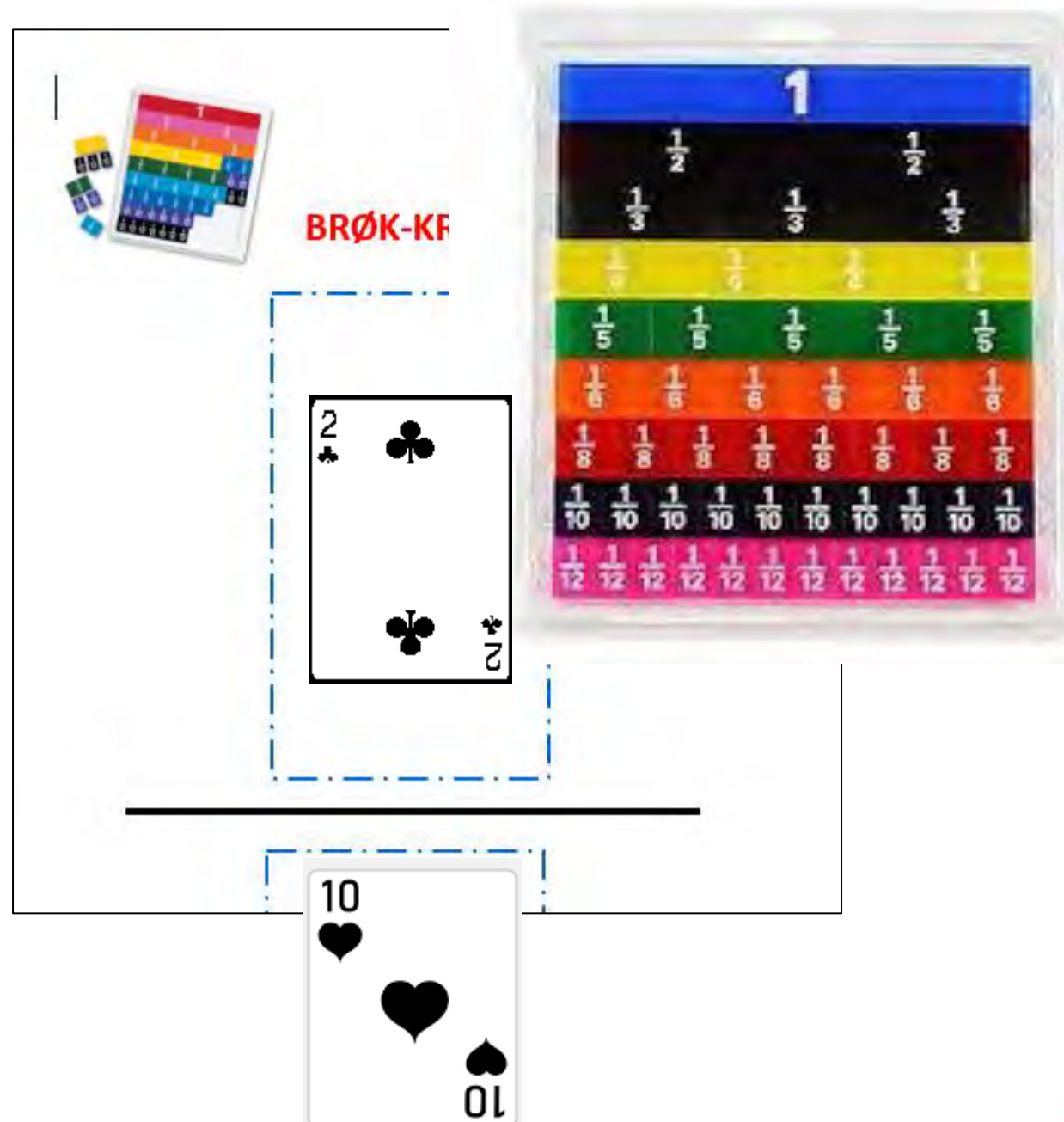


Krig med brøker

Progression

(brug; es, 2,3,4,5,6,8,10, dame)

- Spil med stambrøker
- **Spil med ægte brøker**
- Spil hvor du skal lægge op i den række følge du trækker – ægte og uægte brøker

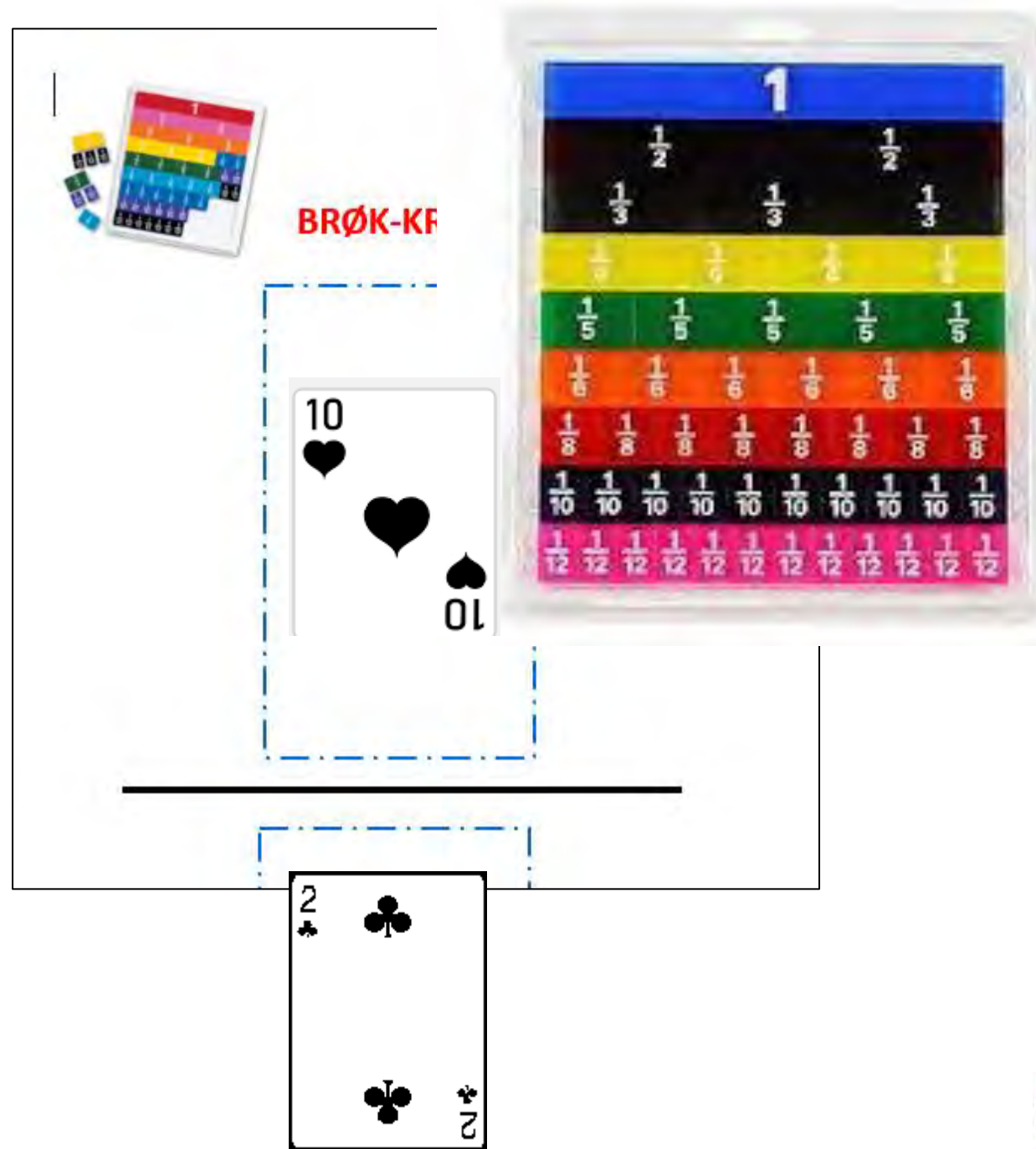


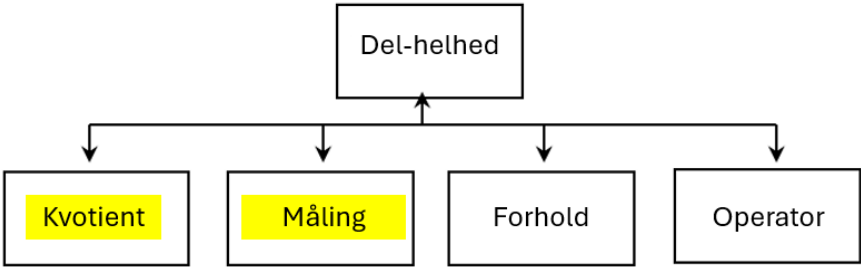
Krig med brøker

Progression

(brug; es, 2,3,4,5,6,8,10, dame)

- Spil med stambrøker
- Spil med ægte brøker
- **Spil hvor du skal lægge op i den række følge du trækker – ægte og uægte brøker**





Tæthed

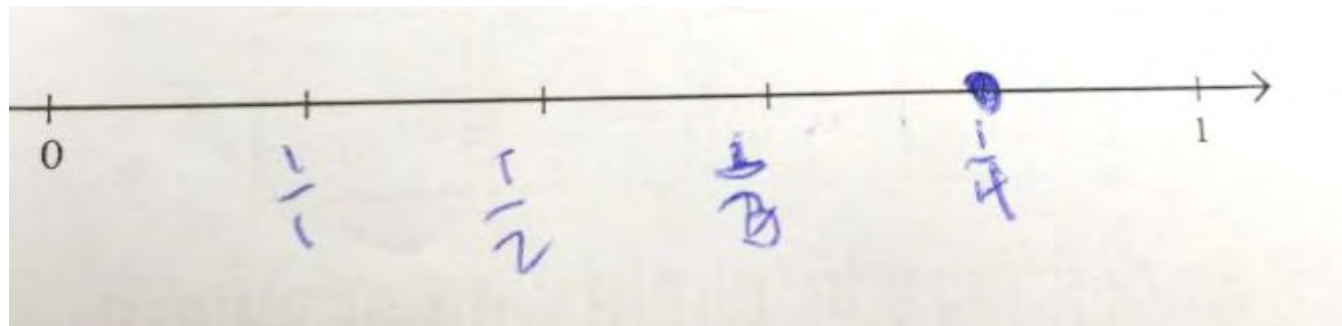
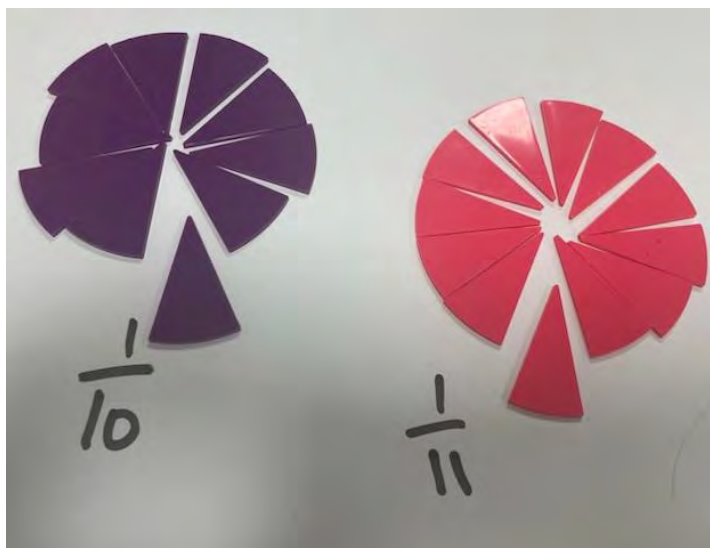
Naturlige tal		Rationale tal
Der er ikke nogen tal imellem to på hinanden følgende tal.		Der er ikke et bestemt tal, som er det næste i rækken. Der er fx ikke en bestemt brøk, som er den næste efter $\frac{1}{4}$ eller et bestemt decimaltal efter 0,25 Der er uendeligt mange tal mellem to vilkårlige rationale tal.



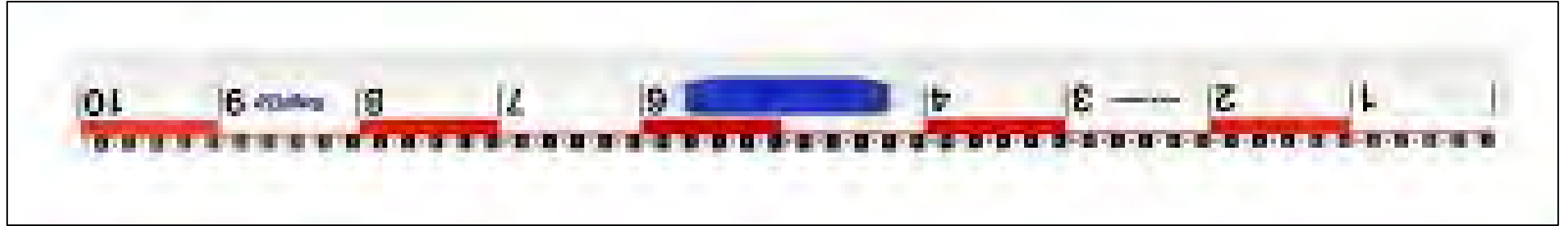
Forskellige fejl

Skriv en brøk som ligger mellem $\frac{1}{4}$ og $\frac{1}{3}$

Nøj



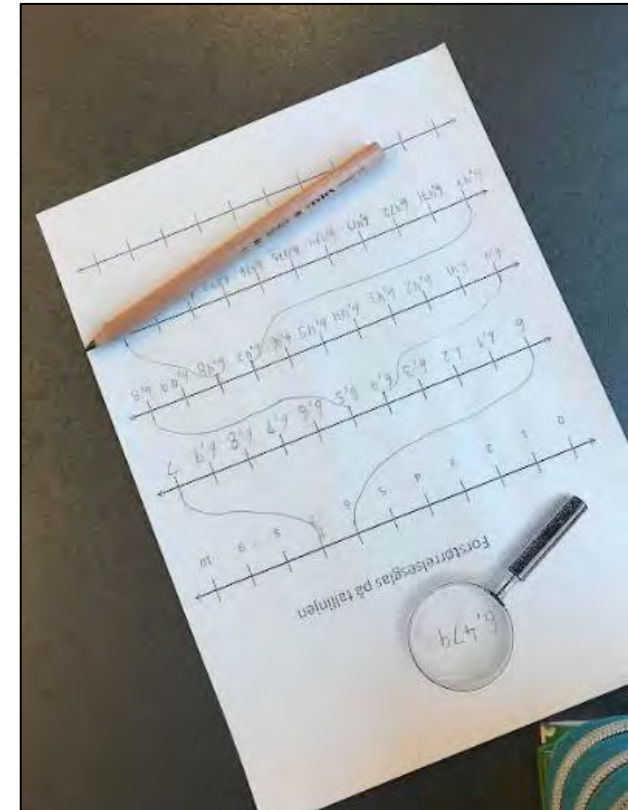
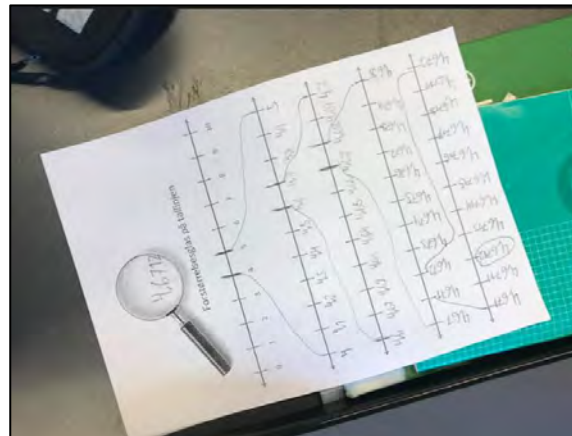
WORKSHOP INDSKOLING-MELLEMTRIN

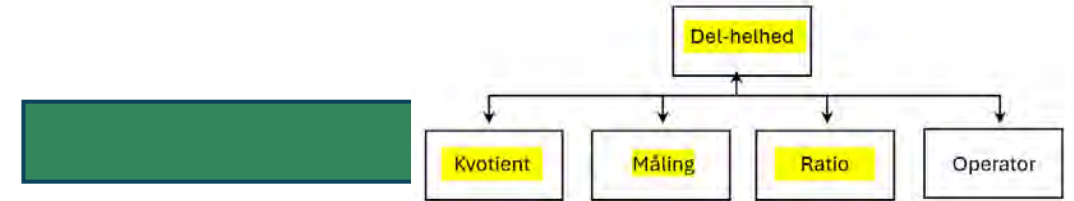


Tæthed

Elastik og zoom ind på tallinjen

meter-linial og decilitermål og liter mål





Ækvivalens – lige store brøker

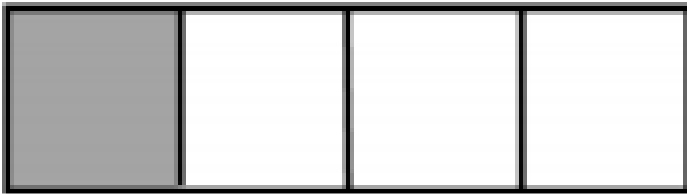
Naturlige tal	Rationale tal
Hvert talsymbol repræsenterer én bestemt størrelse. Eksempel: 2 står for ••, og 3 står for •••.	Forskellige symboler kan repræsentere den samme tal. Eksempel: $\frac{1}{4}$ og $\frac{2}{8}$, Eller inden for decimaltal er 0,2 og 0,20 det samme tal.

Typisk fejl

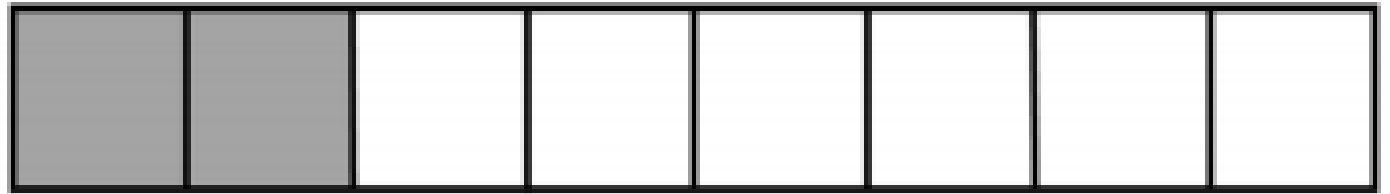
800 < 800,00

$$\frac{1}{4} \neq \frac{2}{8}$$

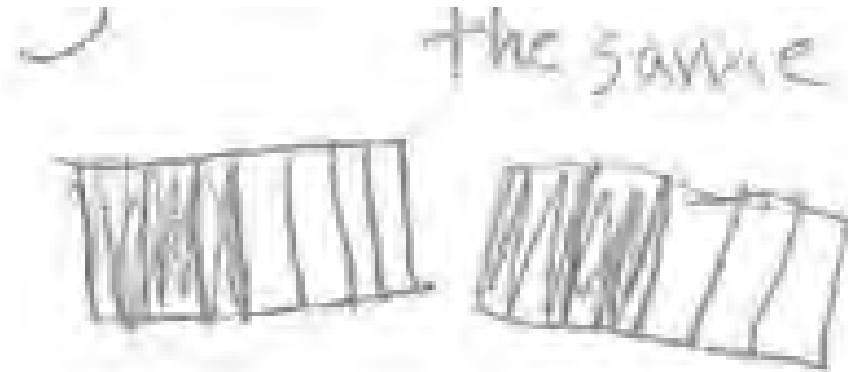
$\frac{1}{4}$



$\frac{2}{8}$



$\frac{3}{7}$ or $\frac{2}{5}$



Hvad vil du vurdere er sværest?

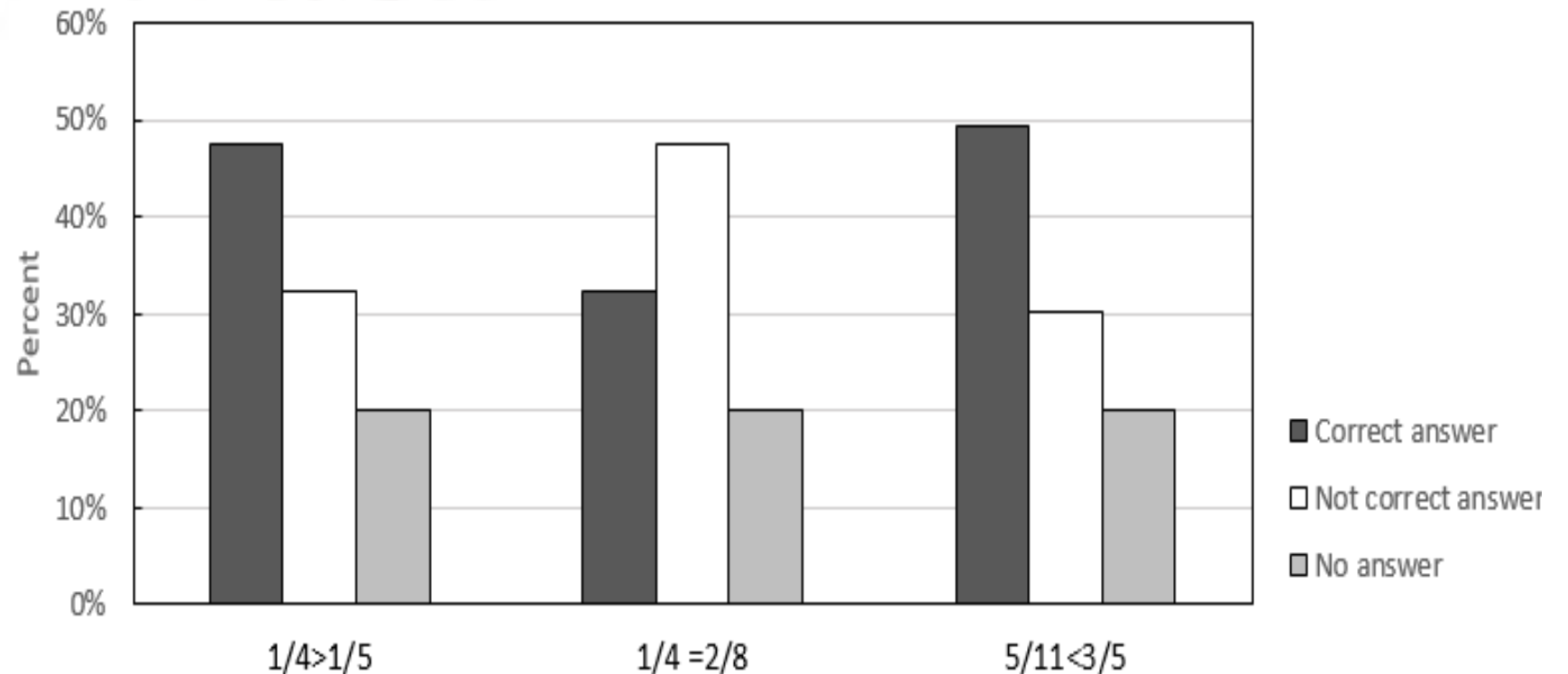
Indsæt det manglende tegn: $>$, $<$ eller $=$.

Tryk på pilen.

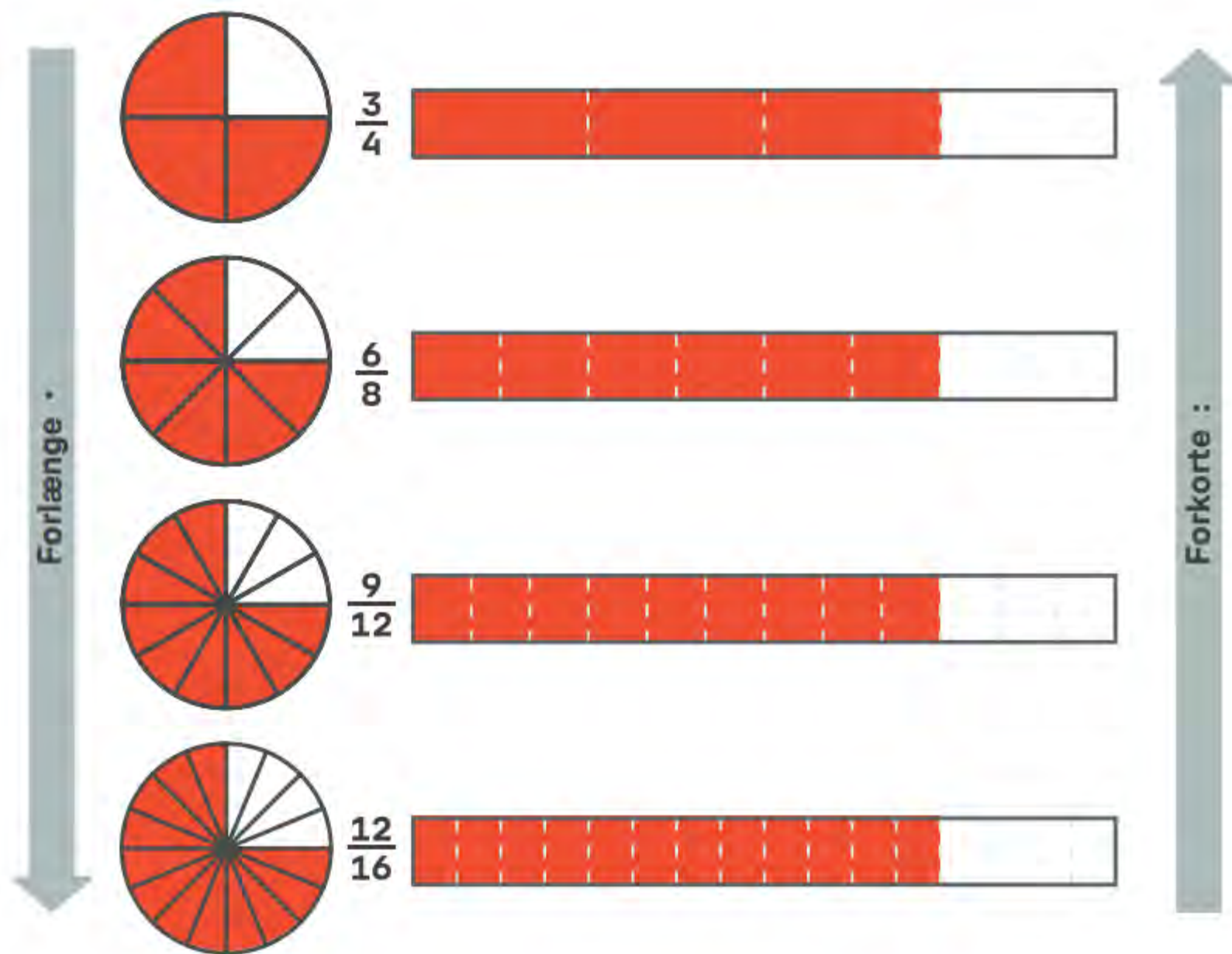
$$\frac{1}{4} \quad \boxed{> \quad \checkmark} \quad \frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{4} \quad \boxed{= \quad \checkmark} \quad \frac{2}{8}$$

$$\frac{5}{11} \quad \boxed{< \quad \checkmark} \quad \frac{3}{5}$$



Hvorfor er ækvivalensforståelsen vigtig?

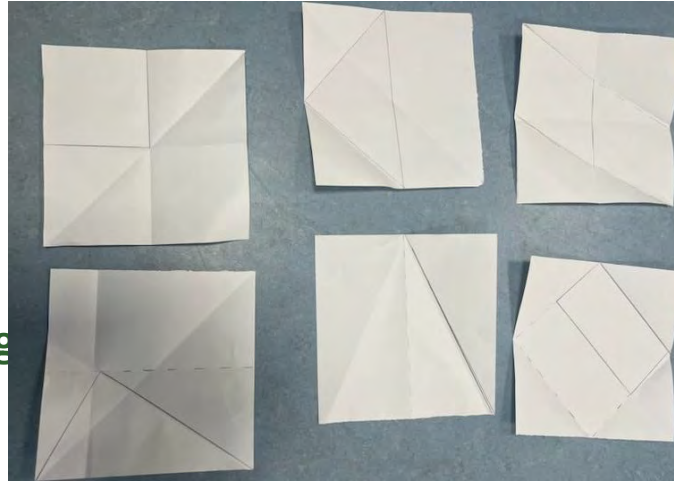


- Forlænge
- Forkorte
- Forvirrer!!!



Hvordan kan vi så arbejde med ækvivalente brøker?

Forslag klassisk papirfoldningsopgave



Vi laver Lagkagebygning



$$\frac{4}{8}$$

$$\frac{3}{5}$$

$$\frac{2}{99}$$

$$\frac{22}{44}$$

$$\frac{3}{7}$$

$$\frac{999}{1000}$$



Hvorfor er ækvivalens begrebet vigtigt?

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{3}{12} + \frac{4}{12} = \frac{7}{12}$$

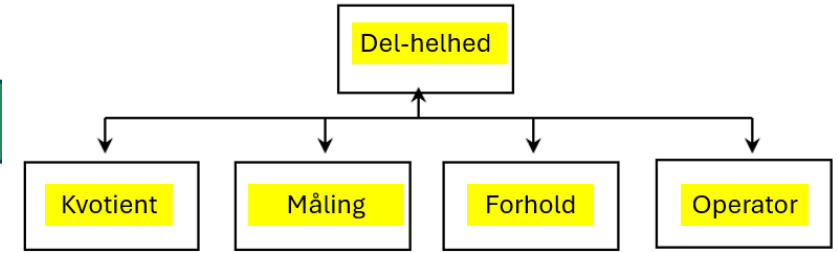
$$\frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 25\%$$

$$\frac{2(3a+5b)}{4} = \frac{3a+5b}{2}$$



$a) \frac{1}{2} + \frac{4}{8}$	$b) 4 \times \frac{3}{4}$	$c) 4 \times \frac{2}{8}$	$d) \frac{5}{6} + \frac{4}{3}$
$e) 1\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$	$f) 3\frac{4}{8} \times 2$	$g) 3\frac{1}{4} - \frac{1}{2}$	$h) \frac{3}{4} \text{ of } 20$
$i) 6 \div \frac{2}{6}$	$j) \frac{1}{2} + \square = \frac{7}{8}$		

Figure 1: Tasks posed to the students



Regneoperationer

Naturlige tal		Rationale tal
Der kan skabes nogle bestemte forventninger til resultatet af regneoperationen Eksempel: Multiplikation giver altid et større resultat.		Der er ikke de samme forventninger til resultatet af regneoperationen som inden for de naturlige tal. Eksempel Multiplikation giver ikke altid et større resultat.

Opgave 7.2

Skriv en brøk, der er halvt så stor som $\frac{4}{7}$.

Data:

Ca. 48% svarer forkert

Typiske fejlsvar:

Svar	Antal
$\frac{2}{3}$	7770
$\frac{8}{14}$	5429
$\frac{2}{5}$	2677
$\frac{2}{4}$	2211
$\frac{1}{3}$	1673

10.2 $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} =$ $\frac{3}{4}$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{6}$$

$$1 + \frac{1}{4}$$

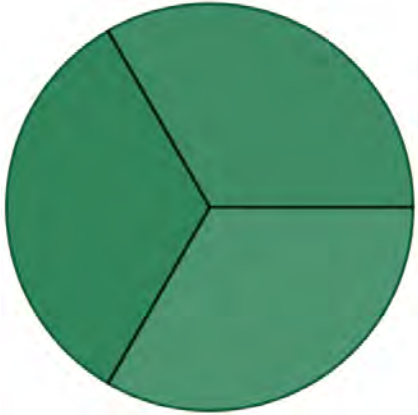
$$\frac{2}{3} + \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{8}$$

$$\frac{3}{5} + 5$$

$$12\frac{1}{2} + 10\frac{1}{4}$$

Tabel 2. Eksempler på stykker elever uformelt skal kunne forsøge løse og komme frem til rimelige overanslag på resultats størrelse



3. Hvilke elever er i vanskeligheder?



Heltalsdistraktorer

Hvor stor en brøkdel er farvet?



$$\frac{4}{1}$$

~~$$\frac{3}{4}$$~~

$$\frac{3}{4}$$

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$



Repræsen-
tation

Størrelse/værdi

$$\frac{1}{4} > \frac{1}{3}$$

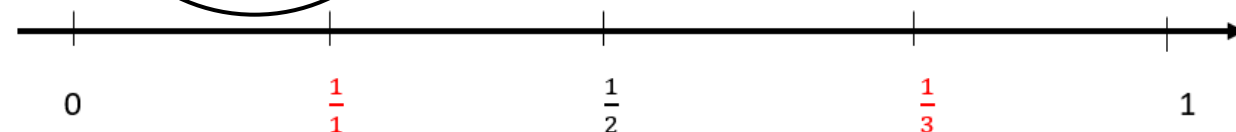
Heltals-
distraktorer

Regne-
operation

Tæthed

$$\frac{1}{5} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{3} = \frac{2}{8}$$



The highest correlation was found between the two aspects: representation and density ($r_s = 0.121$, (ns)).

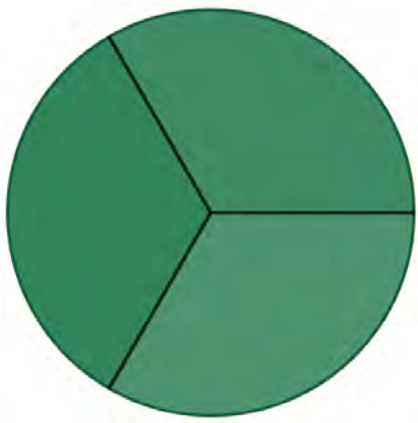
Aspect of natural-number bias	1	2	3	4
1. Representation	1			
2. Size	-.001 (ns)	1		
3. Density	0.117 (ns)	0.035 (ns)	1	
4. Operation	0.051 (ns)	0.050 (ns)	-0.065 (ns)	1

Table 3: Correlation matrix between the four Natural-number aspects. Note: Spearman's rank-order correlation coefficient (r_s), Significance levels: $p < 0.05$ (overall) and $p < 0.0083$ (Bonferroni corrected) for individual correlations, (ns): not significant

Bringing Nordic mathematics education into the future. Preceedings of Norma 20 : The ninth Nordic Conference on Mathematics Education, Oslo, 2021

Det jeg håber, I tager med

- Brug mange repræsentationer
- Elever skal ikke regne på en størrelse de ikke kender/kan forstille sig
- Det tager laaaaaaaaang tid at udvide talbegrebet – og det fortsætter hele livet



**Tak, for en brøkdel af jeres
tid.**

